

Modell 19

Schiefe Ebene mit Kleinkraftmesser

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Bauanleitung für die Konstruktion der Schiefen Ebene mit Klein-Kraftmesser.



THEMATISCHE AUFGABE



Datum

Name

Klasse

1.

a) Warum fängt der Wagen nicht schon bei der kleinsten Auslenkung an, loszufahren?

Der Wagen fängt nicht sofort bei der kleinsten Auslenkung an, loszufahren, weil verschiedene Gegenkräfte wirken, die die Bewegung verhindern. Die wichtigsten sind:

- 1. Reibung:** Zwischen den Rädern des Wagens und der schiefen Ebene wirkt eine Haftreibung. Diese muss erst überwunden werden, bevor der Wagen ins Rollen kommt. Die Haftreibung ist immer größer als die Gleitreibung, weshalb der Wagen zunächst stillsteht.
- 2. Trägheit:** Der Wagen hat eine Masse und damit eine Trägheit. Es erfordert eine minimale Kraft (eine resultierende Hangabtriebskraft), um den Wagen in Bewegung zu versetzen.
- 3. Geringe Hangabtriebskraft:** Bei sehr kleinen Neigungswinkeln ist die Hangabtriebskraft, die sich aus der Gewichtskraft und dem Neigungswinkel ergibt, zu schwach, um die Haftreibung zu überwinden.

Nur wenn die Neigung groß genug ist, dass die Hangabtriebskraft die Haftreibung überwindet, setzt sich der Wagen in Bewegung.

b) Wenn die Bahn stärker angehoben wird, nimmt der Neigungswinkel α der schiefen Ebene zu. Dadurch erhöht sich die Komponente der Gewichtskraft, die entlang der schiefen Ebene wirkt, also die sogenannte **Hangabtriebskraft**:

$$F_{\text{Hang}} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

Hierbei sind:

- m die Masse des Wagens,
- g die Erdbeschleunigung,
- $\sin(\alpha)$ der Anteil der Gewichtskraft, der parallel zur Ebene wirkt.



Mit zunehmendem Winkel wird $\sin(\alpha)$ größer, wodurch auch die Hangabtriebskraft steigt. Diese zusätzliche Kraft führt zu einer stärkeren Beschleunigung des Wagens, da die Reibungskraft (wenn sie überwunden wurde) im Vergleich zur Hangabtriebskraft weniger ins Gewicht fällt.

Wir können die Gewichtskraft, die auf den Wagen wirkt, in zwei Komponenten zerlegen, die parallel bzw. senkrecht zur Bahn verlaufen:

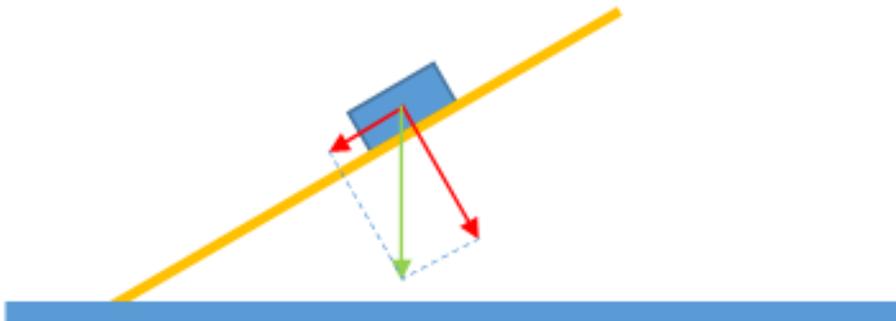


Diagramm 1b

Die Gewichtskraft ist als grüner Pfeil dargestellt, die beiden Kraftkomponenten, die in (Vektor-)Summe dieselbe Kraft ergeben, in Rot. Bei Aufstellwinkel 0 entsteht so keine Kraft parallel zu Bahn, während bei senkrechtem Stand der Bahn die Gewichtskraft identisch mit der Hangabtriebskraft ist und keine Kraft senkrecht zur Bahn resultiert.

Die Beobachtung zeigt also, wie die Beschleunigung des Wagens von der Steigung der schiefen Ebene abhängt: Je steiler die Bahn, desto schneller wird der Wagen.

Datum

Name

Klasse





2.

a) Warum passt die Aufstellhilfe 45° exakt?

Die Bahn ist 18 Rasteinheiten (à 15 mm) lang: vom Mittelpunkt des Gelenks am Fuß bis zu den Strebenadaptern zum Einhängen der Stützen. Die Länge der Aufstellhilfe 45° kann als die Hypotenuse (lange Seite) eines rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks gesehen werden, das vom Einhängepunkt mit einer Kathete 9 Einheiten nach links unten und mit der zweiten Kathete senkrecht dazu 9 Einheiten nach rechts unten verläuft. Dort trifft die zweite Kathete genau den Fuß des Aufstellers. Nach Pythagoras brauchen wir also eine Strecke von

$$L = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9 * \sqrt{2}$$

Einheiten

Die Statiklasche 21,2 ist für eine Rasteinheit ausgelegt:

$$15\text{mm} * \sqrt{2} \approx 21,213\text{mm}$$

Die X-Strebe 84,8 ist für eine Diagonale zu 4 Rasteinheiten ausgelegt:

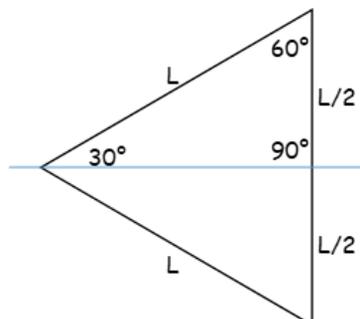
$$4 * 15\text{mm} * \sqrt{2} \approx 84,852\text{mm}$$

Hinweis: Die Beschriftung der X-Strebe 84,8 müsste auf eine Nachkommastelle gerundet genauer tatsächlich 84,9 lauten.

Mit zwei X-Streben 84,8 und einer Lasche 21,2 dazwischen erhalten wir – im Rahmen der Fertigungsgenauigkeit – exakt die benötigte Länge, um die Bahn um genau 45° aufzustellen.

b) Warum passt die Aufstellhilfe 30° exakt?

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Alle Innenwinkel betragen 60°. Dann ergibt sich für die obere Hälfte dieses Dreiecks ein Halbwinkel von 30° und eine Länge der rechten Halbseite von genau der Hälfte der Seitenlänge des Anfangsdreiecks:



technika

Datum

Name

Klasse





Bei 30° Aufstellwinkel benötigen wir eine Aufstellhilfe mit genau der halben Länge der 18 Rasteinheiten. Das sind also

$$\frac{18}{2} * 15mm = 9 * 15mm = 135mm$$

Das geht wunderbar mit zwei I-Streben 60 (2 · 4 Rasteinheiten) und einer Statiklasche 15 dazwischen (die noch fehlenden 9. Rasteinheit). Die Aufstellhilfe geht also genau auf.

3.

Messungen/Quantitative Betrachtung:

- Die Messergebnisse müssten einen sinusförmigen Verlauf zeigen: Der Anteil der Hangabtriebskraft an der Gewichtskraft ist $\sin(\alpha)$, wenn α der Aufstellwinkel ist.
- Die Hälfte der Gewichtskraft als Hangabtriebskraft wird bei 30° erreicht und nicht, wie man vielleicht vermuten könnte, in 45°. Jedoch nimmt die Sinusfunktion nicht linear zu, sondern folgt einer trigonometrischen Beziehung.



Die Hangabtriebskraft entspricht der Komponente der Gewichtskraft, die parallel zur schiefen Ebene wirkt. Diese Komponente wird durch $F_{\text{Hang}} = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ beschrieben.

Für einen Neigungswinkel von 30° ergibt sich $\sin(30^\circ) = 1/2$. Das bedeutet, dass bei 30° die Hangabtriebskraft exakt die Hälfte der gesamten Gewichtskraft beträgt. Dies lässt sich geometrisch erklären: In einem rechtwinkligen Dreieck mit einem Winkel von 30° ist die Gegenkathete halb so lang wie die Hypotenuse. Das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse definiert den Sinus eines Winkels, also gilt:

$$\sin(30^\circ) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{1}{2}$$

Daher wird bereits bei einer Neigung von 30° die Hälfte der Gewichtskraft als Hangabtriebskraft wirksam.



EXPERIMENTIERAUFGABE

1. Der errechnete Wert für die Masse beträgt rechnerisch

$$m = \frac{F}{g_N} = \frac{0,8N}{9,80665 \frac{m}{s^2}} = 0,081578kg = 81,578g$$

Das ist aber völlig übertrieben genau angegeben – diese Genauigkeit können wir gar nicht garantieren! Da m und F proportional zueinander sind, beträgt der relative Fehler

$$E_{relativ} = \frac{0,02N}{0,8N} = 2,5\%$$

Der Messfehler in kg beträgt damit – unter der Annahme, dass wir tatsächlich auf 0,02 N genau ablesen können und ohne eventuelle systematische Fehler:

$$\Delta m = \frac{\text{Ablesefehler}}{\text{Messwert}} \cdot m = \frac{0,02N}{0,8N} \cdot \frac{0,8N}{9,80665 \frac{m}{s^2}} \approx 0,002039kg \approx 2,0g$$

Bei 30° Anstellwinkel der schiefen Ebene ist die Hangabtriebskraft halb so groß wie die Gewichtskraft – also 0,4 N. Die Ablesegenauigkeit ist aber unverändert 0,02 N. Deshalb ergibt sich der prozentuale Fehler nun zu

$$E_{relativ} = \frac{0,02N}{0,4N} = 5,0\%$$

Der Fehler bei der Bestimmung der Masse ist jetzt prozentual also doppelt so hoch, weil wir absolut ja immer noch genauso ungenau messen wie bei der Gesamtkraft! Der Messfehler in kg beträgt damit

$$\Delta m = \frac{\text{Ablesefehler}}{\text{Messwert}} \cdot m = \frac{0,02N}{0,4N} \cdot \frac{0,8N}{9,80665 \frac{m}{s^2}} \approx 0,004079kg \approx 4,1g$$

Die Bestimmung der Masse des Wagens ist also viel genauer, wenn wir sie geschickt ausführen – bei senkrechter Aufstellung der Bahn nämlich. Und auch da ist sie bei weitem nicht so genau, wie wir die Erdbeschleunigung kennen.

Datum

Name

Klasse





Merke (1): Ein Messergebnis ohne die Angabe einer Genauigkeit sagt nichts Zuverlässiges aus! Wer sagt denn, dass die Ungenauigkeit nicht 30 %, 50 % oder sogar mehrere 100 % groß ist? Erst wenn wir Informationen über die Genauigkeit der Angaben haben, wissen wir, woran wir sind, und können damit fundiert weiterrechnen.

Merke (2): Die Genauigkeit eines von einem Messgerät angezeigten Wertes ist etwas ganz anderes als die Auflösung der Anzeige!

Beispiel: Eine handelsübliche Haushalts-Körperwaage mit digitaler Anzeige zeigt normalerweise eine Nachkommastelle bei der kg-Angabe an, suggeriert also eine Genauigkeit von 0,1 kg oder 100 g. Oft steht sogar „d = 100 g“ an der Waage. Dieses d ist aber nur die Auflösung. Es hat nichts mit der Genauigkeit der Waage zu tun! Der angezeigte Wert kann sehr wohl um mehrere kg falsch sein! Nicht umsonst hüten sich die Hersteller solcher Geräte typischerweise, Angaben zur Genauigkeit ihrer Produkte zu veröffentlichen. Nun wisst ihr, warum.

 Datum

 Name

 Klasse


Messgeräte, von denen wir eine bestimmte, bekannte Genauigkeit benötigen, müssen deshalb kalibriert werden. Dazu justiert man sie auf geeignete Weise so, dass sie für hinreichend genau bekannte Referenzbedingungen die korrekten Werte liefern. Wird das Kalibrieren (was ein rein technischer Vorgang ist) amtlich durchgeführt (was rechtliche Fragen betrifft), wird es Eichen genannt. Eine Eichung ist eine amtlich durchgeführte Kalibrierung; ein geeichtes Gerät ist nicht nur kalibriert, sondern amtlich kalibriert. Ein nur in diesem Sinne justiertes Gerät ist nicht geeicht, sondern „nur“ kalibriert.

ANLAGEN

Bauanleitungen und Vorlagen für die Modelle:

Modell 19: Bauanleitung Schiefe Ebene mit Klein-Kraftmesser.

Weiterführende Informationen

- [1] Wikipedia: [Schiefe Ebene](#).
- [2] Dennis Rudolph: Messfehler und Fehlerbetrachtung. Auf [gut-erklart.de](#).
- [3] Ulf Konrad: Fehlerrechnung. Auf [ulfkonrad.de](#).
- [4] Ulf Konrad: Fehlerfortpflanzung. Auf [ulfkonrad.de](#).
- [5] Wikipedia: [Fehlerfortpflanzung](#). Hinweis: Die verwendete Mathematik führt bis über die Sekundarstufe hinaus.
- [6] Dr. Alexey Chizhik: [Messfehler](#). Georg-Augustin-Universität Göttingen. Hinweis: Dieser Link ist für Interessierte, die einmal schauen möchten, wie weit man mit Fehlerrechnung gehen kann. Das Niveau ist das eines Physikstudiums. Durch Vorwärtsblättern mit dem Link auf der rechten Seite gelangt man bis zur Fehlerfortpflanzung.